Topologie

Notizen zur Vorlesung im Sommer 2019
gehalten von Prof. Dr. Gerd Laures

Nils Müller

Bochum, 30. September 2019

Auszug aus dem Vorlesungsverzeichnis: Die Topologie beschäftigt sich mit den qualitativen Eigenschaften geometrischer Objekte. Ihr Begriffsapparat ist so mächtig, dass kaum eine mathematische Struktur nicht mit Gewinn topologisiert wurde. Die Vorlesung hat das Ziel, einen Einblick in dieses Gebiet zu vermitteln. Zu Beginn werden einige Grundbegriffe wiederholt, die schon in der Analysis eine wichtige Rolle spielten, unter anderem Zusammenhang, Kompaktheit und die Hausdorff-Eigenschaft. Damit gerüstet kann die Heranführung an die Algebraische Topologie beginnen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Topologie

1.1 Metrische Räume

Definition 1 *Eine* <u>*Metrik*</u> *d auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{array}{rc} \cdot & d(a,b) \geq 0 \text{ und } d(a,b) \Leftrightarrow a = b \text{ (pos. Definitheit)} \\ \cdot & d(a,b) = d(b,a) \text{ (Symmetrie)} \\ \cdot & d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \text{ (Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Eine Menge X zusammen mit einer Metrik d heisst <u>*metrischer Raum*</u>*.*

Definition 2 *Eine* <u>*ε-Umgebung*</u> *von $a \in X$ ist $U_\varepsilon(a) := \{a \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}$.*

Definition 3 *Eine* <u>*Umgebung*</u> *von $a \in X$ ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, die eine ε-Umgebung von a enthält.*

Definition 4 *$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow a :\Leftrightarrow$ für jede Umgebung U von a gilt $a_n \in U$, für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 5 *Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ Abbildung. f heisst* <u>*stetig in $a \in X$*</u>*, falls für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y gilt*

$$f^{-1}V := \{a \in X \mid f(a) \in V\}$$

ist eine Umgebung von a in X. f heisst <u>*stetig*</u>*, falls f in jedem $a \in X$ stetig ist.*

Feststellung 1 *Äquivalent sind*

(i) f *ist stetig in* $a \in X$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$

(iii) $a_n \longrightarrow a \Rightarrow f(a_n) \longrightarrow f(a)$

Definition 6 *X metrischer Raum. Eine Menge $O \subseteq X$ heisst* <u>*offen*</u>*, falls O eine Umgebung jedes ihrer Elemente ist.*

1.2 Topologische Räume

Definition 7 *Eine* <u>*Topologie*</u> *τ ist eine Menge von Teilmeinen von X mit*

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $\sigma_1, \sigma_2 \in \tau \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \tau$

(iii) $\sigma_i \in \tau,\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \sigma_i \in \tau$

Elemente aus τ heissen <u>*offene Mengen*</u>*. Das Paar (X, τ) heisst* <u>*topologischer Raum*</u>*. U heisst* <u>*Umgebung*</u> *von $a \in X$, falls es ein $\sigma \in \tau$ mit $a \in \sigma \subseteq U$ gibt.*
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow a :\Leftrightarrow$ für alle Umgebungen von a gilt, dass $a_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 8 *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst* <u>*stetig*</u>*, falls Urbilder offener Mengen stets offen sind. f heisst* <u>*Homöomorphismus*</u>*, falls f bijektiv und f, f^{-1} stetig sind.*

Definition 9 *Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, dann ist $g \circ f$ stetig.*

1.3 Abgeschlossene Teilmengen

Definition 10 *$A \subseteq X$ heisst abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.*

Definition 11 *Ein Punkt b eines top. Raumes X heisst Berührpunkt von A, $A \subseteq X$, falls jede Umgebung von b die Menge A schneidet. Die Menge $\overline{A} := \{x \in X \mid x \text{ ist Berührpunkt von } A\}$ heisst Abschluss von A.*

Feststellung 2

(i) $\overline{A}$ *ist abgeschlossen.*

(ii) A *abgeschlossen* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

(iii) $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge die A enthält, d.h.* $\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \text{ abg.} \\ A \subseteq B}} B$.

Definition 12 *Das Innere von A, $A \subseteq X$ ist definiert durch $\mathring{A} := X - (\overline{X - A})$.*

Feststellung 3

(i) $\mathring{A}$ *ist offen.*

(ii) A *ist offen* $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

(iii) $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{B \text{ offen} \\ B \subseteq A}} B$.

Definition 13 *Der Rand von A ist $\partial A := \overline{A} - \mathring{A}$.*

Definition 14 *Ein Filter auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}X$ mit*

(i) $F \in \mathcal{F}, F \subseteq F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$

(ii) $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(iii) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

(iv) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Definition 15 *Eine Filterbasis auf X ist ein $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}X$ mit*

(i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B \subseteq B_1 \cap B_2, B \in \mathcal{B}$

(ii) $B \neq \emptyset$

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

Man schreibt $\langle \mathcal{B} \rangle := \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$ für einen von $\mathcal{B}$ erzeugten Filter.

Definition 16 *Man nennt $\mathcal{F} \longrightarrow x :\Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x)$ die Konvergenz des Filters, wobei $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x ist.*

Feststellung 4 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, falls für alle Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \longrightarrow x$ gilt $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \longrightarrow f(x)$.*

1.4 Die Kategoriensprache

Definition 17 *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus*

- *einer Klasse von Objekten* $\mathrm{obj}_{\mathcal{C}} = |\mathcal{C}|$
- *zu je zwei Objekten X, Y einer Menge von Morphismen (Schreibweise: $f : X \to Y$)* $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$

· *zu Objekten X,Y,Z einer Kompositionsabbildung*

$$\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(X,Z), (g,f) \mapsto g \circ f$$

· *zu jedem Objekt X einer Identität* $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$

· *die Verknüpfung habe die Eigenschaften*

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(ii) $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$

Definition 18 *Eine Kategorie heisst klein, wenn die Objektklasse eine Menge ist. Eine kleine Kategorie dessen Morphismenmengen höchstens ein Element haben, heisst teilweise geordnete Menge. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so bezeichnet $\mathcal{C}^{op}$ die entgegengesetzte Kategorie, d.h.* $|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$ *und* $\mathcal{C}^{op}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$.

Definition 19 *Ein Morphismus $f : X \to Y$ heisst Isomorphismus, falls es ein $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y, g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt. g heisst dann Inverses von f. Selbstmorphismen $f : X \to X$ heissen Endomorphismen und falls sie zusätzlich Isomorphismen sind, nennt man sie Automorphismen.*

Definition 20 *Die Kategorie der topologischen Räume* Top *ist definiert durch die Klasse der topologischen Räume* $|\mathrm{Top}|$ *mit stetigen Abbildungen zwischen* $X, Y \in |\mathrm{Top}|$ *als Morphismen in* $\mathrm{Top}(X,Y)$ *und der Verknüpfung stetiger Abbildungen als Verknüpfung von Morphismen.*

2 Universelle Konstruktionen

2.1 Induzierte Topologien

Definition 21 *Sei X ein topologischer Raum. Und sei $f : M \to X$ Abbildung. Dann heisst*

$$\mathcal{I} := \{f^{-1}O \mid O \subseteq X \text{ offen}\}$$

von f induzierte Topologie auf M. Ist f die Inklusionsabbildung von $M \subseteq X$, dann heisst $\mathcal{I}$ Teilraumtopologie und $(M, \mathcal{I})$ heisst Teilraum von X.

Satz 1 *(Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie 1)*
$\mathcal{I}$ ist die einzige Topolgoie auf $M \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) f ist stetig, $M \xrightarrow{f} X, x \mapsto x$.

(ii) Für jede Abbildung $g : T \to M$ gilt: g stetig $\Leftrightarrow f \circ g$ stetig.

Definition 22 *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heisst Einbettung, falls f injektiv ist und X die von f induzierte Topologie trägt.*

Definition 23 *Es seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume, M Menge und $f_i : M \to X_i$ Abbildungen. Die von*

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}O \mid O \subseteq X_i\}$$

erzeugte Topologie heisst die von $(f_i)_{i \in I}$ induzierte Topologie auf M.

Satz 2 *(Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie 2)*
Die von $\mathcal{S}$ induzierte Topologie ist die einzige Topologie auf M mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Alle f_i sind stetig.

(ii) Für jede Abbildung $g : T \to M$ gilt: g stetig $\Leftrightarrow f_i \circ g$ stetig.

Definition 24 *$\prod_{i \in I} X_i$ zusammen mit der von den Projektionen erzeugten Topologie heisst Produkt der Räume X_i.*

Definition 25 *Es seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume, M sei eine Menge und $f_i : X_i \to M$ Abbildungen. Dann heisst*

$$\mathcal{I}^{op} := \{O \subseteq M \mid f_i^{-1}(O) \subseteq X_i \text{ offen für alle } i \in I\}$$

coinduzierte Topologie auf M. Ist $|I| = 1$ und $f : X_i \to M$ surjektiv, so heisst $\mathcal{I}$ Identifizierungstopologie. Im Falle der Projektion auf Äquivalenzklassen unter einer Äquivalenzrelation auf X, heisst $\mathcal{I}^{op}$ Quotiententopologie und $(M, \mathcal{I}^{op})$ Quotientenraum.

Satz 3 *(Universelle Eigenschaft der coinduzierten Topologie)*
$\mathcal{I}^{op}$ ist die einzige Topologie auf M mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Alle f_i sind stetig.

(ii) Für jede Abbildung $g : M \to T$ gilt: g stetig $\Leftrightarrow$ alle $g \circ f_i$ stetig.

Die erste Bedingung wäre nicht zwingend nötig ($g := \mathrm{id}_M; T := M$).

Definition 26 *$(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Dann heisst*

$$\coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \subseteq I \times \bigcup_{i \in I} X_i$$

zusammen mit der von den Injektionen

$$\mathrm{in}_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (i, x)$$

coinduzierten Topologie, Summe, disjunkte Vereinigung oder Coprodukt.

Definition 27 *Seien $f : A \to X, g : A \to Y$ stetige Abbildungen. Dann*

$$X \sqcup_A Y := {X \sqcup Y} \Big/ {g(a) \sim f(a)}\,.$$

3 Einfache Eigenschaften topologischer Räume

3.1 Zusammenhang

Definition 28 *Ein topologischer Raum X heisst zusammenhängend, falls*

$$X \cong X_1 \sqcup X_2 \Rightarrow X_1 \text{ oder } X_2 = \emptyset.$$

Satz 4 *Äquivalent sind*

(Z) *X ist zusammenhängend.*

(AO) *Jede abgeschlossene/offene Teilmenge von X hat die Form $\emptyset$ oder X.*

(S) *Jede stetige Abbildung $f : X \to S^0 = \{-1, 1\}$ ist konstant.*

Folgerung 1 *Ist $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, so gilt*

$$X \text{ zusammenhängend} \Rightarrow Y \text{ zusammenhängend.}$$

Folgerung 2 *Es sei X topologischer Raum und $U_i \subseteq X, i \in I$ zusammenhängender Teilräume mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, für alle $i, j \in I$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ zusammenhängend.*

Folgerung 3 *Unter den zusammenhängenden Teilräumen von X, die a enthalten, gibt es einen grössten $Z(a)$. Dieser ist abgeschlossen und nennt sich Zusammenhangskomponente von a.*

Definition 29 *Ein topologischer Raum heisst wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ einen Weg gibt, der a mit b verbindet. Das heisst, es gibt stetige Abbildung $w : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = a, w(1) = b$.*

Feststellung 5 *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Definition 30 *X heisst lokal wegzusammenhängend, falls für alle $a \in X$ gilt: Jede Umgebung von a umfasst eine wegzusammenhängende Umgebung von a.*

Satz 5 *X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend $\Rightarrow$ X wegzusammenhängend.*

3.2 Trennung

Definition 31 *Einen topologischen Raum heisst*

(T1): *zu je zwei Punkten $a, b \in X$ gibt es Umgebungen, die jeweils den anderen nicht enthalten.*

(T2): *zu $a, b \in X$ gibt es disjunkte Umgebungen.*

(T3): *zu $a \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen gibt es disjunkte Umgebungen.*

(T4): *zu A, V abgeschlossen in X gibt es disjunkte Umgebungen.*

Definition 32 *Seien A,B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Eine Urysohn-Funktion zu A,B ist eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f_{|A} \equiv 0$ und $f_{|B} \equiv 1$.*

Satz 6 *(Tietze-Urysohn)*
Äquivalent sind

- *(T4)*
- *(Urysohn-Eigenschaft) zu disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen gibt es eine Urysohn-Funktion.*
- *(Tietze-Eigenschaft) zu $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig gibt es eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F_{|a} \equiv f$.*

3.3 Kompaktheit

Definition 33 *Sei X topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen heisst offene Überdeckung, falls $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. $\mathcal{U}$ heisst abzählbar/endlich, falls I abzählbar/endlich ist. X heisst kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.*

Feststellung 6 *Jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.*

Proposition 1 *Jeder kompakte Teilraum K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen in diesem.*

Satz 7 *Ist $f : X \to Y$ surjektiv und stetig, X kompakt. So ist auch Y kompakt.*

Folgerung 4 *Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y hausdorff. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Definition 34 *Sei X metrischer Raum. Dann heisst X totalbeschränkt, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge E und $(x_i)_{i \in E}, x_i \in X$ gibt mit $\bigcup_{i \in E} U_\varepsilon(x_i) = X$.*
Ein $\delta > 0$ heisst Lebesgue-Zahl zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, falls es zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ gibt mit $\overline{U_\delta(x) \subseteq U_i}$.

Satz 8 *Für metrische Räume sind folgende Aussagen äquivalent.*

- *(K) Der Raum X ist kompakt.*
- *(PK) Jede reelle stetige Funktion auf X ist beschränkt.*
- *(TL) Der Raum X ist total beschränkt, und zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gibt es eine Lebesgue-Zahl.*

3.4 Kompaktheit und Konvergenz

Definition 35 *$\mathcal{F}$ heisst Ultrafilter, falls $\mathcal{F}$ Filter ist und $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$.*

Satz 9 *Jeder Filter liegt in einem Ultrafilter.*

Satz 10 *Seien $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und A eine Teilmenge von X. Dann enthält $\mathcal{F}$ immer A selbst oder das Komplement von A.*

Satz 11 *X ist genau dann kompakt, falls jeder Ultrafilter konvergiert.*

Folgerung 5 *(Tychonoff)*
Das Produkt kompakter Räume ist kompakt.

Folgerung 6 *(Heine-Borel)*
$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ K beschränkt und abgeschlossen.

3.5 Abbildungsräume

Definition 36 *Es sei $Y^X := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\}$. Die kompakt-offen Topologie auf Y^X wird erzeugt von*

$$M(K, V) := \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq V\},\ K \text{ kompakt, } V \text{ offen.}$$

D.h. U ist eine Umgebung von $f \in Y^X$ falls es $(M(K_i, V_i))_{i=1,\dots,n}$ gibt, sodass

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i, V_i) \subseteq U.$$

Definition 37 *X heisst lokal kompakt, falls jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung enthält.*

Feststellung 7 *Sei X kompakt und hausdorff, dann ist X auch lokal kompakt.*

Satz 12 *Sei X kompakt, hausdorff und Y metrischer Raum. Dann wird die KO-Topologie auf Y^X von der Supremumsmetrik*

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

erzeugt.

Feststellung 8

(i) Ist $f : Y \to Y'$ stetig, so auch $f_* : Y^X \to (Y')^X, g \mapsto (f \circ g)$.

(ii) Ist $f : X \to X'$ stetig, so auch $f^* : Y^{X'} \to Y^X, g \mapsto (g \circ f)$

Definition 38 *Die Abbildung*

$$\begin{gathered} \hat{f} : X \to Z^Y, \\ x \mapsto (y \mapsto f(x,y)) \end{gathered}$$

nennt sich Adjungierte von $f : X \times Y \to Z$.

Satz 13 *(Exponentialgesetz)*
Sei Y lokal kompakt. Dann ist

$$\begin{aligned} Z^{X \times Y} &\longrightarrow (Z^Y)^X \\ (f : X \times Y \to Z) &\longmapsto \left(\substack{\hat{f} : X \to Z^Y \\ x \mapsto (y \mapsto f(x,y))} \right) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Folgerung 7 *Ist X lokal kompakt, so ist die Auswertung*

$$\begin{gathered} \mathrm{ev} : Y^X \times X \to Y, \\ (f,x) \mapsto f(x) \end{gathered}$$

stetig.

Folgerung 8 *X, Y lokal kompakt. Dann ist die Verknüpfungsabbildung*

$$Z^Y \times Y^X \longrightarrow Z^X, (g,f) \longmapsto (g \circ f)$$

stetig.

Folgerung 9 *Sei Y lokal kompakt. $p : X \to X'$ Identifizierung. Dann ist*

$$p \times \mathrm{id}_Y : X \times Y \longrightarrow X' \times Y$$

eine Identifizierung.

4 Homotopietheorie

4.1 Wege und Homotopien

Definition 39 *Ein Weg ist eine stetige Abbildung* $\gamma : I := [0,1] \to X$.
Der Wegeraum ist $PX := X^I$.
Der Unterraum der Wege von a *nach* b *ist* $PX(a,b) := \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = a \text{ und } \gamma(1) = b\}$. *Der Schleifenraum ist definiert als* $\Omega(X,a) := PX(a,a)$.
Die Menge der Wegekomponenten von X *ist* $\pi_0 X := {}^{X}/_{\sim}$ *mit* $a \sim b :\Leftrightarrow$ *es gibt* $\gamma \in PX(a,b)$.

Definition 40 *Seien* $F : X \to Y, G : X \to Y$ *stetig. Eine Homotopie von* f *nach* g *ist eine stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} h : I \times X &\longrightarrow Y, \\ (t,x) &\longmapsto h(t,x) =: h_t(x) \end{aligned}$$

mit $h_0 = f, h_1 = g$.
f *heisst nullhomotop, falls* f *homotop zu einer konstanten Abbildung ist.*
f *heisst Homotopieäquivalenz zwischen* X, Y, *falls es* $g : Y \to X$ *gibt und Homotopien* $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.
Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \to Y$, *wird mit* $[X, Y]$ *bezeichnet.*

Definition 41 X *heisst zusammenziehbar, falls* X *homotopieäquivalent zum Punktraum ist.*
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ *heisst sternförmig, falls es ein* $a \in X$ *gibt mit:* $\forall b \in X : ta + (1-t)b \in X$ *für alle* $t \in I$.

Satz 14 *Sind* $f, f' : X \to Y$ *homotop und* $g, g' : Y \to Z$ *homotop, so sind auch deren Kompositionen* $gf, g'f' : X \to Z$ *homotop.*

Definition 42 *Die Homotopiekategorie* HoTop *ist definiert durch* $|\mathrm{HoTop}| := |\mathrm{Top}|$, *also der Klasse der Topologischen Räume. Die Menge der Morphismen von* X *nach* Y *ist definiert als die Menge der Homotopieklassen* $[X, Y]$. *Die Komposition ist durch* $[g] \circ [f] := [gf]$ *gegeben.*

4.2 Das Fundamentalgruppoid

Definition 43 *Ein Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *wobei* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *Kategorien sind, ist eine Zuordnung, die jedem* $X \in |\mathcal{C}|$ *ein* $FX \in |\mathcal{D}|$ *und jedem Morphismus* $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *einen Morphismus* $Ff \in \mathcal{D}(FX, FY)$ *zuordnet, mit*

(F1) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$

(F2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definition 44 *Ein Gruppoid ist eine Kategorie in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Die Kategorie der kleinen Gruppoide und Funktoren zwischen ihnen wird mit* Grpd *bezeichnet.*

Definition 45 *Sei* $\mathcal{G}$ *ein kleines Gruppoid, dann definiert* $\mathcal{G}_U$ *mit* $|\mathcal{G}_U| \subseteq |\mathcal{G}|$, $\mathcal{G}_U(a,b) := \mathcal{G}(a,b), a, b \in |\mathcal{G}_U|$ *und er Einschränkung der Verknüpfung das Untergruppoid.*

Feststellung 9 *Angenommen* $\mathcal{G}$ *ist ein Gruppoid,* $a, b \in |\mathcal{G}|$ *und* $\mathcal{G}(a,b) \neq \emptyset$. *Dann sind die Gruppen* $\mathcal{G}(a,a)$ *und* $\mathcal{G}(b,b)$ *isomorph.*

Definition 46 *Ist* x *ein Punkt aus* X, *so ist die Fundamentalgruppe von* X *bei* x *definiert durch* $\pi_1(X,x) := \pi_0 \Omega(X,x)$.

Folgerung 10 *Die Fundamentalgruppe* $\pi_1(X,x)$ *hängt bis auf Isomorphie nur von der Wegekomponente von* x *ab.*

Definition 47 *Das* *Fundamentalgruppoid* πX *ist eine Kategorie mit* $|\pi X| = X$, $\pi X(a,b) = \pi_0 PX(a,b)$ *und einer Komposition* $[v] \circ [u] := [u * v]$, *also der Klasse der hintereinanderausgeführten Wegen.*

Feststellung 10 *Sei* $f : X \to Y$ *stetig, dann ist*

$$\begin{aligned} \pi f : \pi X &\longrightarrow \pi Y, \\ x &\longmapsto f(x) \\ \big([u] : a \to b\big) &\longmapsto \big([f \circ u] : f(a) \to f(b)\big) \end{aligned}$$

ein Funktor.

Feststellung 11 *Ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathrm{Grpd}, \\ X &\longmapsto \pi X \\ f &\longmapsto \pi f. \end{aligned}$$

Definition 48 *Seien* $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *Funktoren. Eine* *natürliche Transformation* $\varphi : F \to G$ *ist eine Zuordnung, die jedem Objekt* $X \in |\mathcal{C}|$ *einen Morphismus* $\varphi_x \in \mathcal{D}(FX, GX)$, *mit der Eigenschaft, dass für alle* $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\varphi_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das heisst $Gf \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ Ff$. *Sind alle* φ_X *Isomorphismen, so heisst* φ *natürliche Äquivalenz.*

Feststellung 12 *Homotopien von* f *nach* g *induzieren natürliche Äquivalenzen* $\pi f \xrightarrow{\sim} \pi g$.

Definition 49 *Ein Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *heisst* *Äquivalenz von Kategorien*, *falls es ein* $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *gibt mit natürlichen Äquivalenzen*

$$\begin{aligned} \varphi : G \circ F &\xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \\ \psi : F \circ G &\xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Folgerung 11 *Ist* $f : X \to Y$ *eine Homotopieäquivalenz, so ist* $\pi f : \pi X \to \pi Y$ *eine Äquivalenz von Kategorien.*

Definition 50 *Ein Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *ist* *volltreu*, *falls für alle* $X, Y \in |\mathcal{C}|$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow[\cong]{F} & \mathcal{D}(FX,FY) \\ f & \longmapsto & Ff \end{array}$$

eine Bijektion ist.
F heisst *wesentlich surjektiv*, *falls es zu allen* $Y \in |\mathcal{D}|$ *ein Objekt* $X \in |\mathcal{C}|$ *und einen Isomorphismus*

$$FX \longrightarrow Y$$

gibt.

Satz 15 *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, falls F volltreu und wesentlich surjektiv ist.*

Folgerung 12 *Sei X wegzusammenhängend, $a \in X$. Dann ist der Inklusionsfunktor*

$$\begin{gathered}\pi_1(X, a) \longrightarrow \pi X, \\ a \longmapsto a \\ \big([u] : a \to a\big) \longmapsto [u]\end{gathered}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Folgerung 13 *Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist*

$$f_* := \pi f : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

4.3 Seifert-van Kampen Theorem

Definition 51 *$\mathcal{C}$ Kategorie. Ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & X_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
X_2 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & X \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

heisst Pushout oder cokartesische Ergänzung, falls für alle $T \in |\mathcal{C}|$ und $f_i \in \mathcal{C}(X_i, T), i = 1, 2$ mit

$$f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$$

genau ein $f \in \mathcal{C}(X, T)$ mit

$$f i_k = f_k,\ k = 1, 2$$

gibt.

Satz 16 *(Seifert-van Kampen für Fundamentalgruppoide)*
Sei X topologischer Raum mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$. Definiere $X_0 := X_1 \cap X_2$. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
\pi X_0 \arrow[r] \arrow[d] & \pi X_1 \arrow[d] \\
\pi X_2 \arrow[r] & \pi X
\end{tikzcd}$$

ein Pushout von Gruppoiden.

Folgerung 14 *Sei X topologischer Raum mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ und $X_0 := X_1 \cap X_2$. Zu $A \subseteq X$, sei $\pi_A(X)$ das Untergruppoid von πX. Falls A jede Wegekomponente von X_0, X_1, X_2 trifft, so ist*

$$\begin{array}{ccc} \pi_A X_0 & \longrightarrow & \pi_A X_1 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \pi_A X_2 & \longrightarrow & \pi_A X \end{array}$$

ein Pushout in Grpds.

Folgerung 15 *(Seifert-van Kampen für Fundamentalgruppen)*
Sei X topologischer Raum mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$. Definiere $X_0 := X_1 \cap X_2$. Ist X_0 wegzusammenhängend, so ist für jedes $a \in X_0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, a) & \longrightarrow & \pi_1(X_1, a) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \pi_1(X_2, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

ein Pushout von Gruppen, d.h.

$$\pi_1(X, a) = \Big(\pi_1(X_1, a) * \pi_1(X_2, a)\Big) \Big/ \pi_1(X_0, a).$$

Definition 52 *Ein punktierter Raum ist ein paar (X, a) mit $a \in X$.*
Die Einpunktvereinigung von X mit Y ist definiert durch

$$X \vee Y := \big(X \sqcup Y\big) / a \sim b.$$

(X, a) heisst wohlpunktiert, falls es eine Umgebung U von a in X gibt, die sich relaitv auf a zusammenziehen lässt. Das heisst es gibt

$$h : I \times U \longrightarrow X,$$
$$\text{mit } h(0, x) = x,\ h(1, x) = a,\ h(t, a) = a,\ \forall t \in I, x \in U.$$

Folgerung 16 *Sind $(X, a), (Y, b)$ wohlpunktiert, so gilt*

$$\pi_1(X \vee Y, [a]) \cong \pi_1(X, a) * \pi_1(Y, b).$$

Definition 53 *Eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der sich überdecken lässt durch offene Mengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \cong \mathbb{R}^n$ homöomorph.*
Sind M_1, M_2 zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension und seien

$$\left.\begin{array}{l} D^n \xhookrightarrow{i_1} M_1 \\ D^n \xhookrightarrow{i_2} M_2 \end{array}\right. \text{Einbettungen.}$$

Definiere die zusammenhängende Summe

$$M \# N := \big(M - i_1(D^n) \sqcup N - i_2(D^n)\big) / \sim,$$

mit $i_1(x) \sim i_2(x)$ für $x \in \partial D^n$.

5 Überlagerungen

5.1 Die Kategorie der Überlagerungen

Definition 54 *Eine Überlagerung eines topologischen Raumes B ist eine stetige Abbildung $p : X \to B$ mit*

(i) Die Fasern $p^{-1}(\{b\}) =: F_b$ sind diskrete Teilräume von X für alle $b \in B$.

(ii) Für jedes $b \in B$ gibt es Umgebung U und einen Homöomorphismus Φ, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\overset{\Phi}{\cong}"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F_b \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Definition 55 *Ein Morphismus von Überlagerungen, $p : X \to B, p' : X' \to B$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to X'$ mit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutieren. Die Kategorie der Überlagerungen über B wird mit $\mathrm{Cov}(B)$ *bezeichnet.*
Ist $p : X \to B$ eine Überlagerung, so ist die Menge der zugehörigen Morphismen $f : p \to p'$ mit Homöomorphismen $f : X \to X$ versehen mit der diskreten Topologie nennt man diese Decktransformationsgruppe.

Feststellung 13 *Sei $p : X \to B$ ein Überlagerung und Z ein zusammenhängender Raum. Dann stimmt je zwei „Hochhebung" ($\Leftrightarrow p\tilde{f} = f, p\tilde{f}' = f$) $\tilde{f}, \tilde{f}'$ von f in dem Diagramm in* Top

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}, \tilde{f}'"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

überein, falls sie in einem Punkt $z_0 \in Z$ übereinstimmen, d.h.

$$\tilde{f}(z_0) = \tilde{f}'(z_0) \Rightarrow \tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z), \forall z \in Z.$$

5.2 Der Hochhebungssatz

Satz 17 *(Hochhebungssatz)*
Sei $p : X \to B$ eine Überlagerung. Sei Z zusammenhängend und sei

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(0,\mathrm{id})}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Z \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists! F"] & B \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in Top. *Dann gibt es genau ein F, sodass das Diagramm kommutiert.*

Folgerung 17 *Sei $p : X \to B$ Überlagerung. Dann ist $\pi_p : \pi X \to \pi B$ Injektion auf Morphismenmengen*

$$\pi X(a,b) \overset{\pi_p}{\rightarrowtail} \pi B(p(a), p(b)).$$

Folgerung 18 *Sei Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist das Hochhebungsproblem*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

genau dann mit $f(z_0) = x_0$ lösbar, wenn das algebraische Problem lösbar ist,

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, tail, "p_*"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B, b_0) \end{tikzcd}$$

d.h. $f_*\big(\pi_1(Z, z_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(X, x_0)\big)$.

5.3 Fasertransport

Definition 56 *Man nennt*

$$\begin{array}{ccc} M_p : \pi B & \longrightarrow & \text{Sets} \\ a & \longmapsto & F_a = p^{-1}\{a\} \\ ([\gamma] : a \to b) & \longmapsto & \left({M_p[\gamma] : F_a \to F_b \atop x \mapsto \tilde{\gamma}(1)} \right) \end{array}$$

den Fasertransportfunktor oder Monodroniefunktor von p .

Definition 57 *Eine Gruppe G operiert auf Menge M von links, wenn*

$$G \times M \overset{\cdot}{\longrightarrow} M,$$
$$(g, m) \longmapsto g \cdot m$$

mit $(g \cdot g') \cdot m = g(g' \cdot m)$ und $1 \cdot m = m$.

Feststellung 14 *$\pi_1(B, b)$ operiert auf der Faser F_b durch*

$$\pi_1(B, b) \times F_b \longrightarrow F_b,$$
$$([\gamma], x) \mapsto M_p[\gamma](x) = \tilde{\gamma}_x(1)^{\textstyle\cdot}$$

Feststellung 15 *Es sei $p : X \to B$ Überlagerung. Für jeden Punkt $x \in X$ ist*

(i) der induzierte Gruppenhomomorphismus

$$p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, p(x))$$

injektiv.

(ii) $p_*(\pi_1(X, x)) = \pi_1(B, b)_x$, d.h. das Bild ist der Stabilisator von x bei der Operation von $\pi_1(B, p(x))$ auf der Faser durch x.

(iii) $M[\gamma]x = x' \Leftrightarrow x$ und x' sind verbindbar durch einen Weg in X.

Definition 58 Set$^{\mathrm{pt}}$:= *Kategorie der punktierten Mengen.*
Dabei sind Objekte Paare $(X,a), a \in X$. Morphismen $f : (X,a) \to (Y,b)$ sind Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(a) = b$.
Eine exakte Sequenz von punktierten Menge ist

$$(X,a) \xrightarrow{f} (Y,b) \xrightarrow{g} (Z,c)$$

mit $g^{-1}\{c\} = f(X)$.

Folgerung 19 *(Exakte Sequenz einer Überlagerung)*
Sei $p : X \to B$ Überlagerung mit $F = p^{-1}\{b\}, x \in F$. Dann ist die folgende Sequenz an jeder Stelle exakt

$$\begin{array}{cccccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(B,b) & \xrightarrow{g} & (F,x) \\ & & [\gamma] & \longmapsto & M[\gamma](x). \end{array}$$

Falls X wegzusammenhängend ist, so ist ausserdem

$$\pi_1(B,b) \longrightarrow (F,x) \longrightarrow 1$$

exakt.

Definition 59 *Ein Funktor von πB in die Kategorie der Mengen wird auch eine πB-Menge genannt. Die πB-Mengen bilden eine Kategorie. Morphismen zwischen zwei πB-Mengen M und N sind die natürlichen Transformationen. Ein Morphismus wird auch einfach πB-Abbildung gennant.*

Feststellung 16 *Die Zuordnung, die jeder Überlagerung von B ihren Fasertransportfunktor zordnet, ist selbst ein Funktor*

$$\begin{array}{ccc} M : \mathrm{Cov}(B) & \longrightarrow & \pi B\text{-Sets} \\ p & \longmapsto & M_p. \end{array}$$

Definition 60 *Ein topologischer Raum B heisst semi-lokal einfach-zusammenhängend (slez), falls er sich durch offene Teilemengen U überdecken lässt, so dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus*

$$\pi_1(U,u) \longrightarrow \pi_1(B,u)$$

für alle $u \in U$ konstant ist, d.h. Schleifen in U sind in B gebunden nullhomotop.

Satz 18 *(Hauptsatz der Überlagerungstheorie)*
Sei B ein lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach-zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist der Funktor

$$M : \mathrm{Cov}(B) \longrightarrow \pi B\text{-Sets},$$

welcher jeder Überlagerung ihren Fasertransportfunktor zuordnet, eine Äquivalenz von Kategorien.

Definition 61 *Eine Gruppe G operiert transitiv auf S, falls die Bahnenmenge*

$$S/G = S/\sim, \; x \sim gx$$

nur aus einem Objekt besteht, d.h. zu $x, x' \in S$ gibt es ein $g \in G$ mit $gx = x'$.

Definition 62 *Die* *Orbitkategorie* $\mathrm{Orb}(G) \subseteq G\text{-Sets}$ *einer Gruppe* G *hat als Objekte*

$$|\mathrm{Orb}(G)| := \{{}^{G}\!/_{H} \mid H \subseteq G \text{ Untergruppe}\}$$

und Morphismen

$$\mathrm{Orb}(G)(X, Y) := \{G\text{-Abbildungen von } X \text{ nach } Y\}.$$

Folgerung 20 *Sei* $\mathrm{Cov}_0(B)$ *die Kategorie der wegzusammenhängenden Überlagerungen* ($\pi_0 X = *$). *Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} M : \mathrm{Cov}_0(B) & \longrightarrow & \mathrm{Orb}(\pi_1(B, b)) \\ p & \longmapsto & \left(\pi_1(B, b) \Big/ p_* \pi_1(X, x) \right) \end{array}$$

eine Äquivalenz.

Folgerung 21 *Zu jedem* B *hinreichend zusammenhängend gibt es eine einfach zusammenhängende Überlagerung* $p : X \to B$.

Definition 63 *Eine einfach-zusammenhängende Überlagerung von* B *wird auch* *universelle Überlagerung* *genannt.*